SESSION DE 1993

Groupe D/S

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes.

Les candidats pourront admettre le résultat de certaines questions pour résoudre des questions ultérieures.

PARTIE A

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(-\pi) = f(\pi)$.

Si $f \in E$ on note $\| f \| = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|$ et on munit ainsi E d'une norme.

Pour tout $g \in E$ on note $\varphi_g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par :

$$\varphi_g(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx \qquad \text{pour } f \in E .$$

On appelle polynôme trigonométrique toute application $h : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forme

$$h(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \qquad \text{avec} \qquad n \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{C} .$$

Section I.

I.1. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on considère la fonction $D_n : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{si } x \neq 0 .$$

et

$$D_n(0) = 2n + 1 .$$

Démontrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, quel que soit l'entier $n \geqslant 0$, on ait :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx \geqslant A \ln(n + 1) .$$

On pourra, par exemple, minorer $|D_n(x)|$ sur des intervalles où D_n est de signe constant.

I.2. Pour $g \in E$ on note $|||\varphi_g||| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\varphi_g(f)|$.

Montrer que $|||\varphi_g||| < +\infty$ est que φ_g est continue.

I.3. Calculer $|||\varphi_g|||$ quand $g \in E$ est à valeurs positives, puis quand $\{ x \in [-\pi, \pi];\ g(x) = 0 \}$ est un ensemble fini.

Section II.

II. On fixe dans cette section $g \in E$. On admettra l'énoncé suivant : toute fonction continue $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux.

II.1. Montrer qu'il existe une suite (g_n), $n \in \mathbb{N}$, de fonctions affines par morceaux appartenant à E qui converge uniformément vers g sur $[-\pi, \pi]$.

II.2. Calculer $|||\varphi_g|||$ et donner une condition nécessaire et suffisante portant sur g pour qu'il existe $f \in E$ avec $\|f\| \leqslant 1$ telle que $|||\varphi_g||| = |\varphi_g(f)|$.

II.3. En utilisant II.1. montrer que g est limite uniforme sur $[-\pi, \pi]$ d'une suite de polynômes trigonométriques.

Section III.

III. Si $f:[-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue on pose, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\,dt$$

et

$$S_n(f, x) = \sum_{-n \leqslant k \leqslant n} c_k(f)\, e^{ikx} \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}.$$

III.1. Démontrer, à l'aide des questions précédentes, qu'il existe une constante $B > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in E$ vérifiant $\|g_n\| \leqslant 1$ et $|S_n(g_n, 0)| \geqslant B \ln(n+1)$.

III.2. Démontrer qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques $H_k:[-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ et une suite croissante d'entiers positifs $n(k)$ telles que, quel que soit k, on ait :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \qquad |H_k(x)| \leqslant 1$$

et

$$|S_{n(k)}(H_k, 0)| \geqslant 2^{2k}.$$

III.3. On fixe une suite croissante d'entiers positifs $q(k)$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $q(k) > n(k)$ et telle que l'on puisse écrire :

$$H_k(x) = \sum_{r=-q(k)}^{q(k)} a_{k,r}\, e^{irx} \quad \text{avec} \quad a_{k,r} \in \mathbb{C}.$$

On pose $p(k) = \sum_{j=1}^{k} (2q(j)+1)$ et, pour $m \geqslant 1$, $f_m(x) = \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} e^{ip(k)x} H_k(x)$. Démontrer que la suite (f_m) converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$ vers une fonction $f:[-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et vérifiant $f(-\pi) = f(\pi)$.

III.4. Étudier la suite $S_n(f, 0)$. Que peut-on en conclure ?
(On pourra calculer $|S_{p(k)+n(k)}(f, 0) - S_{p(k)-n(k)}(f, 0)|$.)

PARTIE B

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}[X]_{\leqslant n}$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré au plus n. On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers, $\mathbb{Z}[X]^u$ l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients entiers. (On convient que le polynôme nul est unitaire ; un polynôme de degré $d \geqslant 0$ est unitaire si son coefficient en X^d est 1.) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Z}[X]^u_n$ l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients entiers de degré n.

On admettra l'énoncé suivant : si f et g appartiennent à $\mathbb{Z}[X]^u$, le PGCD de f et g, vus comme éléments de $\mathbb{Q}[X]$, appartient à $\mathbb{Z}[X]^u$.

Section I.

I.1. Soient n et m des entiers strictement positifs, P et Q des polynômes complexes de degrés respectifs n et m.

I.1.*a*. Démontrer que P et Q admettent une racine commune dans $\mathbb{C}$ si et seulement si il existe $F \in \mathbb{C}[X]_{\leq m-1}$ et $G \in \mathbb{C}[X]_{\leq n-1}$ non nuls tels que $FP + GQ = 0$.

I.1.*b*. On écrit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$. Démontrer que P et Q admettent une racine commune dans $\mathbb{C}$ si et seulement si le déterminant d'ordre $m + n$

$$\varphi(P,Q) = |\Gamma_{k,l}|_{\substack{1 \leq k \leq m+n \\ 1 \leq l \leq m+n}}$$

avec $\Gamma_{i,i+j} = a_j$ pour $1 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$,

$\Gamma_{m+i,i+j} = b_j$ pour $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$,

$\Gamma_{k,l} = 0$ sinon,

est nul.

I.2. Soit n un entier strictement positif et soit $P \in \mathbb{Z}[X]_n^u$.
Démontrer que pour tout entier strictement positif k, il existe un polynôme $P^{[k]} \in \mathbb{Z}[X]_n^u$ tel que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on ait $P^{[k]}(\lambda) = 0$ si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^k = \lambda$ et $P(\mu) = 0$. On pourra considérer $\varphi(P, x^k - a)$.

Section II.

II.1. Soient $M \in \mathbb{R}$ et n un entier positif. Démontrer que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré au plus n, de la forme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $|a_i| \leq M$ quel que soit i, est un ensemble fini.

II.2. Pour tout entier n strictement positif, on définit E_n comme l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]_n^u$ tel que, si on écrit $P = \prod_{1 \leq i \leq n} (X - \lambda_i)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, on ait $|\lambda_i| \leq 1$. Démontrer que E_n est un ensemble fini.

II.3. Démontrer que si $P \in E_n$, alors pour toute racine non nulle λ de P dans $\mathbb{C}$, il existe un entier strictement positif k tel que $\lambda^k = 1$. On pourra utiliser I.2.

Section III.

III.1. Soit $F \in \mathbb{Z}[X]$ et $G \in \mathbb{Z}[X]^u$ non nul. Démontrer que le reste et le quotient de la division euclidienne de F par G appartiennent à $\mathbb{Z}[X]$.

III.2. Soit n un entier strictement positif. On définit $\Phi_n \in \mathbb{C}[X]$ par $\Phi_n = \prod_{\lambda \in Z_n} (X - \lambda)$ avec :

$$Z_n = \{ \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda^n = 1; \quad \forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \quad \lambda^k \neq 1 \}.$$

Montrer que $Z_n = \{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} ; k \text{ entier, premier à } n \}$.

Démontrer que, pour $m \geq 1$, on a :

$$X^m - 1 = \prod_{d \in D_m} \Phi_d,$$

où D_m est l'ensemble des entiers > 0 divisant m.

III.3. Déduire de la question précédente que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]^u$, quel que soit $n \geqslant 1$.

III.4. Soit n un entier strictement positif. On suppose qu'il existe F et G dans $\mathbb{Z}[X]^u$ de degré au moins égal à 1 tels que $\Phi_n = F\,G$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et un entier $m \geqslant 2$ premier à n tels que $F(\lambda) = 0$ et $G(\lambda^m) = 0$. En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ et un nombre premier p ne divisant pas n tels que $F(\mu) = 0$ et $G(\mu^p) = 0$. Démontrer qu'il existe $H \in \mathbb{Z}[X]^u$ de degré au moins égal à 1 qui divise F et $G(X^p)$.

III.5. Soit p un nombre premier. On note $p\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers divisibles par p. On dit que $g \in \mathbb{Z}[X]$ **p-divise** $f \in \mathbb{Z}[X]$ (ou est un **p-diviseur** de f) s'il existe $h \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $f - gh \in p\mathbb{Z}[X]$. On dit que f et $g \in \mathbb{Z}[X]$ ont un **p-facteur commun** s'il existe $h \in \mathbb{Z}[X]$ de degré strictement positif qui **p-divise** f et g.

III.5.*a*. Démontrer que pour tout entier i tel que $0 < i < p$, le coefficient binomial C_p^i est un entier divisible par p.

III.5.*b*. Démontrer que, quel que soit $f \in \mathbb{Z}[X]$, le polynôme $f^p - f(X^p)$ appartient à $p\mathbb{Z}[X]$.

III.5.*c*. On admet que si $f, g \in \mathbb{Z}[X]^u$ sont tels que $f(X^p)$ et $g(X^p)$ ont un **p-facteur commun**, alors f et g ont un **p-facteur commun**.

Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que si f et g sont dans $\mathbb{Z}[X]^u$ et sont tels que f et $g(X^p)$ ont un **p-facteur commun**, alors f et g ont un **p-facteur commun**.

III.5.*d*. Soit n un entier strictement positif non divisible par p.

Démontrer qu'il existe f_1 et f_2 dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que :

$$f_1(X^n - 1) + f_2(X^n - 1)' - 1 \in p\mathbb{Z}[X].$$

En déduire que tout h dans $\mathbb{Z}[X]^u$ tel que h^2 **p-divise** $X^n - 1$ est de degré nul.

III.6. Démontrer, à l'aide de III.2., III.5.*c*. et III.5.*d*., que l'hypothèse faite en III.4. n'est jamais vérifiée.

III.7. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]^u$. Démontrer qu'il existe un entier strictement positif n tel que $P \in E_n$ si et seulement si il existe un ensemble fini A d'entiers strictement positifs, des entiers positifs $n(k)$, pour $k \in A$, et un entier positif m, tels que

$$P = X^m \prod_{k \in A} \Phi_k^{n(k)}.$$